

高2数学B 媒介変数表示と極座標(1)

媒介変数表示や極座標(極形式)で表される曲線(や曲面)についての理解は、実際に描かないとイメージがしづらい。実際に手を使って地道に曲線(や曲面)のグラフを描くこともできるが、それでは効率が悪い。そこで、この授業では Wolfram Research 社の開発した Mathematica を用いて、様々な曲線(や曲面)のグラフを示すことにする。

なお、同社の作った Wolfram Alpha という、Mathematica 版の検索エンジン(Google や Yahoo! に当たるもの): <http://www.wolframalpha.com> を使うと、Mathematica を持っていないなくても、これらのグラフを描くことができる。余力のある諸君は、このサイトでプリントの右ページの **typewriter** のようなフォントの部分を入力して、実際に図形を描いてみると、理解が深まると思う。

1 媒介変数表示

(1) 関数と媒介変数表示

媒介変数表示で表される図形を考える上で注意すること

① (普通の) 関数の式や陰関数で表された図形の方程式に対して、媒介変数による表し方は無数にある。

② 媒介変数表示で図形を表したときに、 x や y の取り得る値の範囲に注意をする。

$\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t \sin t \end{cases}$ という媒介変数表示で表される曲線は $x^2 - 2y = 1$ という関係

を満たすことから、 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ と考えたいのだが、三角関数の合成を使うと $x = \cos t + \sin t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ となることから、 x の値の取り得る範囲は $-\sqrt{2} \leq$

$x \leq \sqrt{2}$ に限られる。したがって、 $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t \sin t \end{cases}$ という媒介変数表示で表される

曲線は $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) となる。(右上 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ のグラフ, 右中

$\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t \sin t \end{cases}$ のグラフ)

また、このことから、 $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ y = \cos t \sin t \end{cases}$ という媒介変数表示で表される曲線と

$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$ ($-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$) という媒介変数表示で表される曲線は同じ曲線であることが分かる。(右中, 右下)