

高2数学B 媒介変数表示と極座標(2)

(2) 2次曲線の媒介変数表示

三角関数の関係式: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 及びこの式の両辺を $\cos^2 \theta$ で割った $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ は2次曲線の媒介変数表示をする上で強力な武器となる。

例えば、楕円: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) において、 $\frac{x}{a} = \cos \theta, \frac{y}{b} = \sin \theta$ とおくことができることから、 $\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$ は楕円: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) の媒介変数表示の一つとなる。同様に考えることにより、 $\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \theta} \\ y = b \tan \theta \end{cases}$ という媒介変数表示で

表される曲線は双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ となる。

そして、放物線: $y^2 = 4px$ は $\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ という媒介変数表示で表すことができることが分かる。

ところで双曲線(の一方)は、次のようにして表すこともできる。 $f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ とすると、 $\{f(t)\}^2 - \{g(t)\}^2 = 1$ を満たすことから、 $\begin{cases} x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) \\ y = \frac{b}{2}(e^t - e^{-t}) \end{cases}$

として、 t を実数全体で動かせば、その軌跡は双曲線: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($x \geq a$) となる。また、 $f(t)$ と $g(t)$ はそれぞれ $\cos \theta$ と $\sin \theta$ と類似の性質をもつ。そこで、 $f(t) = \sinh t$, $g(t) = \cosh t$ と表し、**双曲線関数** という。

右の4つのグラフはそれぞれ、 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \frac{1}{2} \sin t \end{cases}$, $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \frac{1}{2} \tan t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 9t^2 \\ y = 6t \end{cases}$,

$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \frac{1}{2} \sinh t \end{cases}$ と $\begin{cases} x = -\cosh t \\ y = \frac{1}{2} \sinh t \end{cases}$ の媒介変数表示のグラフである。それぞれ、陰関数に直すとどのような関数になるか、考察してみよう。