

高2数学B 媒介変数表示と極座標(3)

(3) 曲線群と種々の図形

$y = f(x, m)$, $F(x, y, m) = 0$ という図形の方程式において、 m に様々な値を代入することによりえられる図形全体の集合を曲線群という。(この下の例では、一つ一つの図形が直線なので、直線群という。) 曲線群を考える上で、その曲線が通らない部分の点の集合を考えたり、曲線上の点(頂点や中点など)がどのような軌跡を描くかを考えることが結構ある。

軌跡を考える方法には、大きく分けて2つの方法がある、1つは、条件を満たす点 (x, y) のそれぞれの座標を m の式で表す方法、そして、もう一つは、仮にそのような点 (x, y) があったと仮定した場合、それを満たす m の値が存在するかを調べる方法である。

例えば、「 $y = x^2 - mx + m$ という関数において、 m を実数全体の範囲で動かしたときに、頂点がどのような軌跡を描くか。」という問題であれば、「 $y = x^2 - mx + m$ の右辺を平方完成すると、 $y = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + m$ となることから、頂点の x 座標と y 座標を m で表した式:

$$\begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = -\frac{m^2}{4} + m \end{cases}$$

から m を消去して (m がすべての実数値をとるとき、 x もすべての実数値をとる)、頂点の座標の描く軌跡は $y = -x^2 + 2x$ となる。」と前者の方法で考えるし、「 m を実数全体の範囲で動かしたときに、曲線 $y = mx + m^2$ がとおる範囲を求めよ。」という問題であれば、「 $y = mx + m^2$ を m についての2次方程式と考えると、 $m^2 + x \times m - y = 0$ となる。もし仮に条件を満たす点 (x, y) があったと仮定すると、この2次方程式は実数解を持つことから、この m についての2次方程式の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ であればよい。 $D = x^2 + 4y$ だから、求める範囲は $y \geq -\frac{1}{4}x^2$ となる。」と後者の方法で考える。問題に応じて、適宜使い分ける必要がある。

右上のグラフは、 $y = x^2 - mx + m$ の m に様々な値を代入して描いた複数の放物線による曲線群とその頂点の軌跡のグラフであり、右下のグラフは、 $y = mx + m^2$ の m に様々な値を代入して描いた複数の直線による直線群のグラフである。特に右下のグラフを見てみると、無数に引いた直線は必ず放物線 $y = -\frac{1}{4}x^2$ の上方にあることが分かる。実は、この直線群は必ず曲線 $y = -\frac{1}{4}x^2$ に接している。この曲線のことを**包絡線**という。