

高2数学B 媒介変数表示と極座標(6)

(2) 簡単な図形の極方程式

ある曲線(や直線)が極座標 (r, θ) を用いた $r = f(\theta)$ や $F(r, \theta) = 0$ の形で表された図形の方程式を**極方程式**という。極方程式を用いると、直交座標の $y = f(x)$ や $F(x, y) = 0$ の形では表せない図形も表すことができる。

右の1.,2.はそれぞれ、 $r = 2$, $r = 2 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフである。(MathematicaのPolarPlot[]というコマンドでは、 $r = f(\theta)$ という形の曲線は描けるが、 $F(r, \theta) = 0$ の形の曲線は描けないので、ListPolarPlot[]というコマンドを用いて、複数の点をプロットする形で描くことになる。)

(3) 2次曲線の極方程式

極を(1つの)焦点、点 $(\ell, 0)$ を通り始線に垂直な直線を準線に持つ、2次曲線の極方程式は、

$$r = \frac{e\ell}{1 + e \cos \theta} \quad (\text{ただし, } e > 0)$$

となる。(証明は各自考えよ。)この方程式において、 $0 < e < 1$ のとき、この図形は楕円、 $e = 1$ のときこの図形は放物線、 $e > 1$ のときこの図形は双曲線となる。右の図(3.,4.)及び裏面の図(5.)のグラフからそれぞれ極方程式およびその図形を直交座標で表したときの方程式がどうなるか、考察してみよう。

(4) さまざまな曲線の極方程式

これ以外にも様々な曲線の極方程式を考えることができる。裏面の6.~11.はそれぞれ $r = \theta$ ($\theta \geq 0$), $r = \sin 4\theta$, $r = \sin \frac{3}{2}\theta$, $r = 1 + 0.7 \cos \theta$, $r = 1 + \cos \theta$, $r = 1 + 2 \cos \theta$ のグラフである。コンピュータあるいは、実際に手を使って描いてみよう。