

確認問題略解

確認 1.1

(1) (存在可) \equiv

$0 \leq a < a$ であり、 $q=0, r=a$ であり、 \dots
 a は自然数だから、 a の整数 a に対して、

$$a \equiv a < a(1+1)$$

ある整数 q が存在する。よって $r=a-aq$ であり、

$$0 \leq r < a \text{ となる}$$

(存在がただ一つである) \equiv

$$a = aq_1 + r_1, a = aq_2 + r_2 \text{ とする整数 } q_1, q_2$$

及び $0 \leq r_1, r_2 < a$ とする整数 r_1, r_2 が存在する。

$$\text{このとき } aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2$$

$$a(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

$-a < r_2 - r_1 < a$ となり、 $r_2 - r_1$ は a で割り切れることから

$$r_2 - r_1 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

また $a(q_1 - q_2) = 0$ より $q_1 - q_2 = 0 \Leftrightarrow q_1 = q_2$

よって存在はただ一つとなる。□

確認 1.2

$a|a$ より $a = ar, c|a$ より $a = cl$ とする
 整数 r, l が存在する。このとき

$$a = ar$$

$$= c(bl) \text{ と表すことができる。}$$

a, l は整数だから bl も整数となる。よって $c|a$ □

確認 1.3

$a|a$ より $a = ar$ とする整数 r が存在する。

$$a = ar$$

$$= (-a)(-r) \text{ となる。}$$

$$\therefore (-a)|a \quad \square$$

確認 1.4

もとの整数を $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$

$(a_0, a_1, \dots, a_n: 0 \leq a_i < 10 \text{ の整数})$ とする

$$a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$$

$$= (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$$

$$+ \{ a_n \times (10^n - 1) + a_{n-1} \times (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \times (10 - 1) \}$$

と書ける。 $a_n \times (10^n - 1) + a_{n-1} \times (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \times (10 - 1)$ という数に

$1 \leq l \leq n$ とする a の整数 l に対して、

$$10^l - 1 = 10^l - 1^l$$

$$= (10 - 1) \times (10^{l-1} + 10^{l-2} + \dots + 1^{l-1})$$

とできることから、 $10^l - 1$ は 9 の倍数となる。

したがって $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ が 9 の倍数であり、もとの整数は 9 の倍数、 $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ が 9 の倍数であり、もとの整数は 9 の倍数となる。

また、 $a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10 + a_0$

$$= (a_n \times (-1)^n + a_{n-1} \times (-1)^{n-1} + \dots + a_1 \times (-1) + a_0)$$

$$+ [a_n \times \{ 10^n - (-1)^n \} + a_{n-1} \times \{ 10^{n-1} - (-1)^{n-1} \}$$

$$+ \dots + a_2 \times \{ 10^2 - (-1)^2 \} + a_1 \times \{ 10 - (-1) \}]$$

と書ける。 $a_n \times \{ 10^n - (-1)^n \} + a_{n-1} \times \{ 10^{n-1} - (-1)^{n-1} \} + \dots + a_1 \times \{ 10 - (-1) \}$ という数に

$1 \leq l \leq n$ とする a の整数 l に対して、

$$10^l - (-1)^l = \{ 10 - (-1) \} \times \{ 10^{l-1} + 10^{l-2}(-1) + \dots + (-1)^{l-1} \}$$

$$= 11 \times \{ 10^{l-1} + 10^{l-2}(-1) + \dots + (-1)^{l-1} \}$$

とできることから $10^l - (-1)^l$ は 11 の倍数となる。

したがって $a_n \times (-1)^n + a_{n-1} \times (-1)^{n-1} + \dots + a_1 \times (-1) + a_0$

$$= (a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots)$$

より、異なる位の数字の和と差の差が 11 の倍数であり、もとの整数も 11 の倍数となる。□

確認 1.5

6の倍数は2の倍数かつ3の倍数だから、すべての4つの数の和が3の倍数で下1桁が0, 2, 4, 6, 8のいずれかであればよい。
12の倍数は4の倍数かつ3の倍数だから、すべての4つの数の和が3の倍数で下2桁が4の倍数であればよい。

確認 1.6

1からある整数まで数を書き並べ、以下のアルゴリズムにより素数を調べる方法をエラトステネスのふるい、という。

- ① 1を消す。
- ② 残った自然数の中で最も小さい自然数 = 2に0をつけ、2の倍数をすべて消す。
- ③ 残った自然数の中で最も小さい自然数 = 3に0をつけ、3の倍数をすべて消す。
- ④ ②③と同様に残った自然数の中で最も小さいものに0をつけ、0をつけた数の倍数をすべて消すという操作を繰り返す。
- ⑤ そのようにして0をつけた自然数がなくなったとき、0がついた自然数が素数となる。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

以上 0をつけた数が素数である。

確認 1.7

- (1) $96 = 2^5 \times 3$
- (2) $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$
- (3) $430 = 2 \times 5 \times 7 \times 23$

確認 1.8

対偶より、 a も b も p の倍数にならないならば ab が p の倍数にならないことを示す。

a も b も p の倍数でないことから、
 $a = pa_1 + a_2$ とする
 $b = pb_1 + b_2$ とする

整数 a_1, b_1 と $1 \leq a_2, b_2 < p$ とする自然数 a_2, b_2 が存在する。
 $ab = (pa_1 + a_2)(pb_1 + b_2)$
 $= p(pa_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1) + a_2b_2$

a_2b_2 は、 p が素数であることから、 $1, 2, \dots, p-1$ のいずれかの形で重複を許して2個異なるものの積であるから、 p と a_2b_2 の最大公約数も p と b_2 の最大公約数も1となる。したがって a_2b_2 は p の倍数とならない。

$\therefore ab \notin p$ で割り切れない。

対偶をとると $pl \mid a$ ならば $pl \mid a$ かつ $pl \mid b$ □

確認 1.9

- (1) G.C.D. 22 L.C.M. 110
- (2) G.C.D. 196 L.C.M. 2352
- (3) G.C.D. 36 L.C.M. 5400

確認 1.10

a と b のG.C.D.が g だから

$a = ga'$ とする整数 g, a', a'
 $b = gb'$
 a', b' は互いに素

が存在する $\Rightarrow a$ と b の L.C.M. は $ga'b'$ とする
 $\therefore ab = (ga')(gb') = g \cdot (ga'b') = gL$ □

確認 1.11 (1) $a - a = 0 = m \cdot 0$ と表せよう
 $a \equiv b \pmod{m}$ □
 (2) $a \equiv b \pmod{m}$ と表せよう
 $a - b = m \cdot k$ とする整数 k が存在する。
 したがって $b - a = -m \cdot k$
 $= m \cdot (-k)$ と表せよう。
 $b \equiv a \pmod{m}$
 (3) $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$ と表せよう
 $a - b = m \cdot k$, $b - c = m \cdot l$ とする整数
 k, l が存在する
 したがって $a - c = (a - b) + (b - c)$
 $= m(k + l)$
 $\therefore a \equiv c \pmod{m}$ ($k+l$ は整数) □

確認 1.12 (1) $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ より
 $a - b = m \cdot k$, $c - d = m \cdot l$ とする整数
 k, l が存在する。
 $(a+c) - (b+d) = (a-b) + (c-d)$
 $= m(k+l)$ と表せよう
 $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ □
 (2) (1) と同様に考えよう
 $(a-c) - (b-d) = (a-b) - (c-d)$
 $= m(k-l)$ と表せよう
 $a-c \equiv b-d \pmod{m}$
 (3) $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$ より
 $a - b = m \cdot k$, $c - d = m \cdot l$ とする整数
 $m \cdot l$ が存在する,
 $ac - bd = (b+mk)(d+ml) - bd$
 $= m(mkl + bl + dk)$ と表せよう
 $ac \equiv bd \pmod{m}$ □
 (4) 数学的帰納法による
 (5) $ac \equiv bc \pmod{m}$ より
 $ac - bc = m \cdot k$ とする整数 k が存在する
 $c(a-b) = m \cdot k$ とするから $m|c$ ならば
 $m|(a-b)$ c と m は互いに素なので $m|c$ とするから
 $\therefore m|(a-b) \iff a \equiv b \pmod{m}$ □

確認 2.1 a と b が互いに素でないとき
 $a \equiv 0 \pmod{k}$
 $b \equiv 0 \pmod{k}$ とする自然数 k が存在する
 $(k \geq 2)$
 したがって $ax + by \equiv 0 \pmod{k}$
 $1 \neq 0 \pmod{k}$
 (x, y) を満たす自然数 (x, y)
 の組は存在しない。 ... (答)

確認 4.1
 左取り記法とは 4205310 のように、数字を並び、右側から
 何番目の数字かというのを示すことにより、どんな数字を表現方法のことである。
 この方法で数字を表現し、どの数字が何個あるかが分かりにくいため、この数字の
 右下に 10 進法以外のときは (2), (3) などの数字を書く。
 展開記法とは $4 \times 10^6 + 2 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 1 \times 10^2$ のように、どの
 数字が何個集まっていく数字を示すことにより、どんな数字を表現方法のことである。
 何進法であって一意的に数字を表現することができない反面、数字を表現するのに表現が長
 くたり、大小関係が比較しづらいという弱点をもつ。

確認 4.2 (1) 353 (2) 220 (3) 0,8125 (3) 0,1143(5)

確認 4.3 (1) 10432(5) (2) 202(15)
 (3) 120302(5) (4) 23(5)